応用理工学類　応用数学 I Quiz 8 解説

問 1 ラプラス変換の定義に従って、次に挙げる代表的関数のラプラス変換 $F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$ を求めよ。（それぞれの場合の収束領域も明示すること。a は正の実定数とする。）

x のベキ：$f(x) = x^2$

$$\int_0^\infty e^{-sx}x^2dx = \left[\frac{e^{-sx}}{-s}x^2\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{-s}2xdx = -\left[\frac{e^{-sx}}{s^2}2x\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{s^2}dx = \frac{2}{s^3} \quad \text{収束は } Re(s) > 0$$

指数関数：$f(x) = e^{ax}$

$$\int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}dx = \int_0^\infty e^{-(s-a)x}dx = \frac{1}{s-a} \qquad \text{収束は } Re(s) > Re(a)$$

三角関数：$f(x) = \sin ax$

$$\int_0^\infty e^{-sx}\sin axdx = \frac{1}{2i}\int_0^\infty \left\{e^{-(s-ia)x} - e^{-(s+ia)x}\right\}dx = \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right\} \quad \text{収束は } Re(s) > 0$$

問 2 次に従ってラプラス変換の代表的な性質を体得せよ。ここで、$\mathcal{L}[f(x)]$ は関数 $f(x)$ のラプラス変換を表す。（a, b は正の実定数、n は自然数とする。）

(1) ラプラス変換の性質

$$\mathcal{L}[e^{ax}f(x)](s) = \mathcal{L}[f(x)](s-a)$$

と**問 1** の結果をもとに次を求めよ。

$$\mathcal{L}[e^{ax}\sin bx] = \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{(s-a)-ib} - \frac{1}{(s-a)+ib}\right\}, \quad \mathcal{L}\left[e^{ax}x^2\right] = \frac{2}{(s-a)^3}$$

(2) ラプラス変換の性質

$$\mathcal{L}[x^n f(x)] = \left(-\frac{d}{ds}\right)^n \mathcal{L}[f(x)]$$

と**問 1** の結果をもとに次を求めよ。

$$\mathcal{L}\left[x^3\right] = \frac{6}{s^4}, \quad \mathcal{L}[xe^{ax}] = \frac{1}{(s-a)^2}, \quad \mathcal{L}\left[x^2\sin ax\right] = \frac{i}{(s-ia)^3} - \frac{i}{(s+ia)^3}$$

(3) ラプラス変換の性質

$$\mathcal{L}\left[f'(x)\right](s) = s\mathcal{L}[f(x)](s) - f(0)$$

とここまでのテクニックを総動員して次を求めよ。

$$\mathcal{L}\left[x^3e^{ax}\cos bx\right] = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{L}\left[e^{(a+bi)x}x^3\right] + \mathcal{L}\left[e^{(a+bi)x}x^3\right]\right\} = \frac{3}{\{s-(a+bi)\}^4} + \frac{3}{\{s-(a-bi)\}^4}$$