応用理工学類 応用数学 I Quiz 7 解説

問 1 正の範囲 $x > 0$ だけで定義された関数 $\phi(x)$ について、つぎの積分方程式を解け。

$$\int_0^\infty \phi(x)\cos kx dx = e^{-ak} \quad (k > 0 \text{ のとき})$$

「微分方程式」ならぬ「積分方程式」とは、なんだろうか。こんなことで関数 $\phi(x)$ が決まるのだろうか。例えば $x < 0$ の領域での $\phi(x)$ に関しては、この方程式は何も言っていないので、$x < 0$ の領域での $\phi(x)$ は全く決められない。他方、$x > 0$ の領域では、これだけの条件で $\phi(x)$ が曖昧さなく決まるのだろうか。実際、全ての実数 k に関して上の関係が成り立つべきだというのは、結構キツイ条件である。答えを言うと、これで実際 $x > 0$ での $\phi(x)$ が決まってしまうのである。なぜそう言えるのか。

発想を変えて、与えられた積分方程式をフーリエ余弦変換とみなせば、右辺をフーリエ余弦逆変換してやればよいことになる。

$$\phi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ak}\cos kx dk = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{e^{-(a-ix)k} + e^{-(a+ix)k}\right\} dk = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{a-ix} + \frac{1}{a+ix}\right\} = \frac{2a/\pi}{a^2+x^2}$$

最後の変形は必ずしもしなくてよい。なお、フーリエ余弦逆変換を用いたという段階において、暗に $x > 0$ であることを使っている。$x \le 0$ における $f(x)$ の値に関しては、積分方程式自体が何も言っていないので、何もいえない。

問 2 次をフーリエ積分表示とみなすことによって、左辺を計算することなく次を証明せよ。

$$\int_0^\infty dk \frac{\cos kx}{a^2+k^2} = \frac{\pi}{2a}e^{-ax} \quad (\text{ただし } x > 0 \text{ のとき})$$

問３の（1）で見るように、留数の方法を用いれば、左辺を直接計算することも可能である。しかし、この問題を解くだけならば、ずっと楽な方法がある。つまり、発想の転換をして、左辺から右辺を出す代わりに、右辺から左辺を出す。つまり、上の式を

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{a}{a^2+k^2}\right)\cos kx \ dk = e^{-ax}$$

と書いて見ると、右辺のフーリエ積分表示が左辺となることが確かめられればよいことになる。つまり、フーリエ余弦変換を計算して見て

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos kx \ dx = \frac{a}{a^2+k^2}$$

が言えればよいが、これは問 1 でやった積分と同じものである。そのために必要な計算自体は、特に複素数を使わなくても部分積分の方法でできて、

$$\begin{aligned} I = \int_0^\infty e^{-ax}\cos kx \ dx &= \left[\frac{e^{-ax}}{-a}\cos kx\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{-a}(k\sin kx)\,dx \\ &= \frac{1}{a} + \left[\frac{e^{-ax}}{a^2}k\sin kx\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{a^2}\left(k^2\cos kx\right)dx = \frac{1}{a} - \frac{k^2}{a^2}I \end{aligned}$$

から

$$\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)I = \frac{1}{a}, \quad I = \frac{a}{a^2+k^2}$$

とすれば高校生にもできるものだが、それが上の問題の解答になっているということは、フーリエ変換を知る人にしかわからない。高校生には驚きであろう。

問３ 留数の定理を用いて計算することにより、次の関数のフーリエ逆変換を求めよ。

(1)　$F(k)=\dfrac{1}{a^2+k^2}$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+a^2}e^{ikx}dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2ia}\left(\frac{1}{k-ia}-\frac{1}{k+ia}\right)e^{ikx}dk$$

被積分関数には $k=\pm ia$ に１次の極があり、留数はそれぞれ

$$Res(\pm ia)=\pm\frac{e^{\mp ax}}{2ia}$$

であることが分かる。さて、$x\geq 0$ ならば積分路を複素平面の上半面で閉じる必要があり、

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\oint_{\text{上半面}}\frac{e^{ikx}}{k^2+a^2}dk=\frac{1}{2\pi}\times 2\pi i\times Res(+ia)=\frac{e^{-ax}}{2a}$$

他方、$x\leq 0$ ならば積分路を複素平面の下半面で閉じる必要があり、

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\oint_{\text{下半面}}\frac{e^{ikx}}{k^2+a^2}dk=\frac{1}{2\pi}\times(-2\pi i)\times Res(-ia)=\frac{e^{ax}}{2a}$$

両方併せて結果的に

$$f(x)=\frac{e^{-a|x|}}{2a}$$

と書いても良いが、途中で場合分けが必要なことをしっかりと理解してください。

(2)　$F(k)=\dfrac{1}{\{k-(2+3i)\}^2}$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{\{k-(2+3i)\}^2}dk$$

被積分関数は $2+3i$（上半面）に２次の極があり、その留数は「公式」を使うならば

$$Res(2+3i)=\left(e^{ikx}\right)'\Big|_{k=(2+3i)}=ixe^{-(3-2i)x}$$

従って $f(x)$ は $x\leq 0$ の時にはゼロ、$x\geq 0$ の時には $\frac{1}{2\pi}\times(2\pi i)\times Res(2+3i)=-xe^{-(3-2i)x}$ と求まる。まとめて $f(x)=-xe^{-(3-2i)x}\theta(x)$ と書いても良い。なお、高次極の留数の公式は忘れがちだが、テーラー展開と併用して覚えると良い。例えば３次の極の場合

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}=\frac{1}{(z-z_0)^3}\left\{f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z0)^2+\frac{f^{(3)}(z_0)}{3!}(z-z_0)^3+\cdots\right\}$$
$$=\frac{f(z_0)}{(z-z_0)^3}+\frac{f'(z_0)}{(z-z_0)^2}+\frac{f''(z_0)}{2!(z-z_0)}+\frac{f^{(3)}(z_0)}{3!}+\frac{f^{(4)}(z_0)}{4!}(z-z_0)+\frac{f^{(5)}(z_0)}{5!}(z-z_0)^2+\cdots$$

から留数は $\frac{f''(z_0)}{2!}$ と読み取れる。

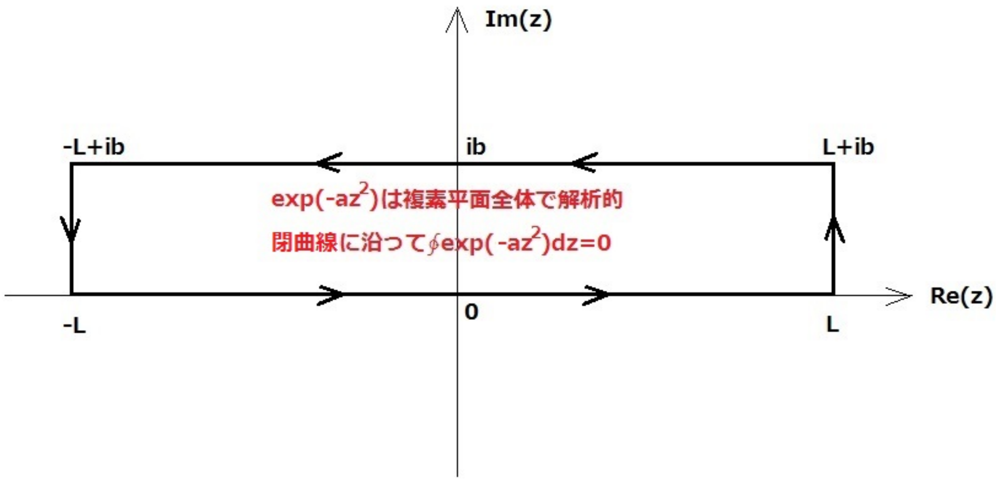
　なお、前回の解説でフーリエ変換の微分が $f(x)$ に $\frac{x}{i}$ をかけることに相当することを思い出して $\frac{1}{\{k-(2+3i)\}^2}=-\left\{\frac{1}{k-(2+3i)}\right\}'$ に注目すると、まず $\frac{1}{k-(2+3i)}$ のフーリエ逆変換が $ie^{-(3-2i)x}\theta(x)$ となることを出しておいて、それに $-\frac{x}{i}$ をかけて $f(x)=-xe^{-(3-2i)x}\theta(x)$ としてしまうのも「アリ」です。

問４ 次の関数 $f(x)$ のフーリエ変換を求め、パーシバルの等式が成り立つことを確かめよ。
（フーリエ変換には複素積分を用いるのが最も直接的）

$$f(x) = e^{-ax^2} \qquad (a > 0)$$

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x+\frac{ik}{2a}\right)^2 - \frac{k^2}{4a}} dx$$
$$= e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x+\frac{ik}{2a}\right)^2} dx = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty+\frac{ik}{2a}}^{\infty+\frac{ik}{2a}} e^{-az^2} dz$$

さて、ここで $b = \frac{k}{2a}$ として次図の長方形の経路にわたる周回積分を考えると、関数 e^{-az^2} は複素平面上のいたるところで解析的な関数なので、コーシーの積分定理から周回積分は（積分路の形状に関わらず）ゼロである。



さらに、$L \to \infty$ の極限で左右辺上の積分はゼロになることを確認できるから（確認せよ）、結局複素平面上で上の式の積分経路を、実軸に平行な直線に沿った $(-\infty + ib \to \infty + ib)$ にわたる積分から、実軸上で $(-\infty \to \infty)$ に渡る積分に平行移動しても値が変わらないことが保証される（確認せよ）。従って、積分路を実軸上に移動して：

$$F(k) = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2} dz = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} \frac{ds}{\sqrt{a}} = e^{-\frac{k^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

これをもとにすれば、この場合についてパーシバルの関係が確かに成り立つことを、次のようにして具体的に確認できる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 \, dk = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{2a}} dk = \frac{1}{2a}\sqrt{2\pi a} = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

問５ 合成積の考えを応用して次の積分方程式を解き、$\phi(x)$ を求めよ。なお、フーリエ逆変換には留数計算を用いること。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) e^{-|x-y|} dy = x^2 e^{-x} \theta(x)$$

関数 $\phi(x)$ のフーリエ変換を $\Phi(k)$、関数 $e^{-|x|}$ のフーリエ変換を $F(k)$、関数 $x^2 e^{-x}\theta(x)$ のフーリエ変換を $G(k)$ とすると、問題の式は

$$\Phi(k) F(k) = G(k)$$

を意味する。ここで

$$F(k) = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-ik)x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+ik)x} dx = \frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik} = \frac{2}{(k+i)(k-i)}$$

$$G(k) = \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-(1+ik)x} dx = -\frac{d^2}{dk^2} \left\{ \int_{0}^{\infty} e^{-(1+ik)x} dx \right\} = -\frac{d^2}{dk^2} \left(\frac{1}{1+ik} \right) = \frac{2i}{(k-i)^3}$$

から、

$$\Phi(k) = \frac{G(k)}{F(k)} = i \frac{k+i}{(k-i)^2} = i \frac{(k-i)+2i}{(k-i)^2} = \frac{i}{k-i} - \frac{2}{(k-i)^2}$$

と求まるので、あとはこれをフーリエ逆変換すればよい。

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{ie^{ikx}}{k-i} - \frac{2e^{ikx}}{(k-i)^2} \right\} dk$$

$x > 0$ の時には積分を上半面で閉じる必要があり、$k = i$ の留数を拾って

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\text{上半面}} \left\{ \frac{ie^{ikx}}{k-i} - \frac{2e^{ikx}}{(k-i)^2} \right\} dk = \frac{1}{2\pi} \times (2\pi i) \times \left\{ ie^{ikx} \Big|_{k=i} - 2 \frac{de^{ikx}}{dk} \Big|_{k=i} \right\} = (2x-1)e^{-x}$$

$x < 0$ の時には積分路を下半面で閉じる必要があり、そこには特異点がないので

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\text{下半面}} \left\{ \frac{ie^{ikx}}{k-i} - \frac{2e^{ikx}}{(k-i)^2} \right\} dk = 0$$

結局 $\phi(x) = (2x-1)e^{-x}\theta(x)$ と求まる。（なお $x = 0$ で $\phi(x)$ は不連続。）

応用数学 I のホームページ

http://www.bk.tsukuba.ac.jp/~CARS/lectureApplMath.html