応用理工学類　応用数学 I **Quiz 6 解説**

問１　省略。

問２ 次の関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(k)$ を求めよ。

(1)

$$f(x) = e^{-|x|}\sin(ax) \quad (a \neq 0)$$

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}e^{-|x|}\sin(ax)dx = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\left\{e^{(-ik+ia)x} - e^{(-ik-ia)x}\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{0}\left\{e^{(1-ik+ia)x} - e^{(1-ik-ia)x}\right\}dx + \frac{1}{2i}\int_{0}^{\infty}\left\{e^{(-1-ik+ia)x} - e^{(-1-ik-ia)x}\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1-ik+ia} - \frac{1}{1-ik-ia}\right] - \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{-1-ik+ia} + \frac{1}{-1-ik-ia}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k-(a-i)} - \frac{1}{k+(a+i)} - \frac{1}{k-(a+i)} + \frac{1}{k+(a-i)}\right\} \text{（このままでよい）}$$

(2)

$$f(x) = xe^{-ax}\theta(x) \quad (a > 0)$$

$$F(k) = \int_{0}^{\infty} xe^{-(a+ik)x}dx = \left[x\frac{e^{-(a+ik)x}}{-(a+ik)}\right]_{x=0}^{x=\infty} + \int_{0}^{\infty}\frac{e^{-(a+ik)x}}{a+ik}dx = -\frac{1}{(k-ia)^2}$$

問３ 変数変換 $t = ax+b, x = \frac{(t-b)}{a}$ をすることにより、

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(ax+b)e^{-i(k-k_0)x}dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\left(\frac{k-k_0}{a}\right)(t-b)}dt = \frac{e^{i\left(\frac{k-k_0}{a}\right)b}}{|a|}G\left(\frac{k-k_0}{a}\right)$$

問４ 面白い応用例

(1) 次の関数のフーリエ積分表示を求めよ。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$F(k) = \int_{-1}^{1} e^{-ikx}dx = \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-1}^{1} = \frac{2\sin k}{k} \quad \text{より} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin k}{\pi k}e^{ikx}dk$$

(2) (1) の結果を用いて、

$$\text{(i)} \quad \int_{0}^{\infty} dk\frac{\sin k}{k} = \frac{\pi}{2} \quad \text{および} \quad \text{(ii)} \quad \int_{0}^{\infty} dk\frac{\cos k\sin k}{k} = \frac{\pi}{4}$$

となることを示せ。

(i) は前問で $x=0$ を入れることによって $1 = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin k}{\pi k}dk = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin k}{k}dk$

(ii) は初等的なやりかたも出来るが、前問で $x=1$ を入れれば Dirichlet の定理より

$$\frac{1}{2} = \frac{f(1+0)+f(1-0)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin k}{\pi k}e^{ik}dk = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin k\cos k}{k}dk$$