応用理工学類　応用数学 I **Quiz 5** **解説**

問 1 ある区分なめらかな周期関数 $f(x)$ を複素フーリエ級数に展開したところ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{1-in} \qquad (*)$$

となったという。次に従って、元の関数 $f(x)$ を求めて見よう。

(1) 関数 $f(x)$ の基本周期はなにか。また、不連続点はあるだろうか。

e^{inx} は全て周期 2π を持つので

$$f(x \pm 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in(x\pm 2\pi)}}{1-in} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{1-in} = f(x)$$

となり、基本周期は 2π とわかる。また、分母が n の 1 次なので、不連続点があることが分かる。（区分なめらかな連続関数のフーリエ展開は「一様収束」となるはずで、展開係数は $1/n$ よりも速く「絶対収束」するはず。）

(2) 上式 (*) のフーリエ級数を項別微分することにより次を示せ。

$$f'(x) = f(x) - 2\pi\delta_{2\pi}(x)$$

周期 2π の周期的なディラックのデルタ関数 $\delta_{2\pi}$ のフーリエ展開は

$$\delta_{2\pi} \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - 2n\pi\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx}$$

となることに注意して、与えられたフーリエ展開を項別微分してみれば

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{in}{1-in}\right)e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1-in} - 1\right)e^{inx} = f(x) - 2\pi\delta_{2\pi}(x)$$

(3) 前問より $0 < x < 2\pi$ において、$f'(x) = f(x)$ であることから、この範囲では

$$f(x) = Ae^{x} \qquad \text{(ただし } A \text{ は定数)}$$

となる。不連続点 $x = 0$ における $f(x)$ のとびが 2π であることを用いて、係数 A が $\frac{2\pi}{e^{2\pi}-1}$ となることを示せ。

$$f(+0) = A, \quad f(-0) = f(2\pi - 0) = Ae^{2\pi}, \quad f(+0) - f(-0) = A\left(1 - e^{2\pi}\right)$$

不連続の飛びが負の向きに 2π でなければいけないのだから、$A = \frac{2\pi}{e^{2\pi}-1}$ と決まる。

(4) $f(x)$ のフーリエ級数にパーシバルの等式を適用して、次の公式を導け。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \pi \coth \pi$$

$f(x)$ は区分連続関数なのでパーシバルの等式が適用できる。複素フーリエ展開の場合のパーシバルの等式（問 2 参照）

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

に代入すれば、右辺が公式の左辺となり、左辺を計算すると

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A^2 e^{2x} dx = \frac{2\pi}{\left(e^{2\pi}-1\right)^2} \times \frac{e^{4\pi}-1}{2} = \pi \coth \pi$$

を得る。

問 2 以下の問に答えよ。

(1) $f_1(x)$ および $f_2(x)$ を周期 2π の周期実関数とする。d_n および e_n をそれぞれ $f_1(x)$ と $f_2(x)$ の複素フーリエ係数としたとき、以下の式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x+a)f_2(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e_{-n} e^{ina}$$

$$f_1(x+a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in(x+a)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(e^{ina}d_n\right) e^{inx}$$

および

$$f_2(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e_m e^{imx}$$

を代入し、積分や n, m に関する和の順番を自由に交換できるものとすれば

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x+a)f_2(x)dx = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left(e^{ina}d_n\right) e_m \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+m)x}dx\right\}$$

ここで右辺の中カッコは $m+n=0$ のときには 1 、それ以外では 0 であることを思い起こせば求める結果が得られる。（なお、上で積分や和の交換を行ったが、それは $f_1(x)$ や $f_2(x)$ が区分なめらかな関数の場合には正当化できる。それ以外では必ずしも正当化できないが、実用上現れる関数は区分なめらかな関数で近似することによって、実際にはこれを使えてしまうことが多い。）

(2) (1) において $f_1(x) = f_2(x) \equiv f(x)$ としたとき、パーシバルの定理（平均 power）

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

を導出せよ。ここで、c_n は $f(x)$ の複素フーリエ係数である。

前問において $d_n = e_n = c_n, a = 0$ とおき、実関数 $f(x)$ に対しては $c_{-n} = c_n^*$

$$\left(\text{なぜならば}\quad c_n^* = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right\}^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx = c_{-n}\quad\text{だから}\right)$$

であることに注意すればよい。

(3) a_n および b_n を $f(x)$ の実フーリエ係数としたとき、(2) の結果を用いて、以下のパーシバルの等式を導け。

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi}{2}a_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$c_n = \frac{1}{\text{周期}}\int_{\text{一周期分}} f(x)e^{i\frac{2n\pi x}{\text{周期}}}dx = \frac{1}{\text{周期}}\int_{\text{一周期分}} f(x)\left(\cos\frac{2n\pi x}{\text{周期}} + i\sin\frac{2n\pi x}{\text{周期}}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\text{周期}}\int_{\text{一周期分}} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{\text{周期}}dx\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{2}{\text{周期}}\int_{\text{一周期分}} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{\text{周期}}dx\right) = \frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}$$

実関数 $f(x)$ に対しては a_n, b_n は実数なので $|c_{\pm n}|^2 = \frac{a_n^2}{4} + \frac{b_n^2}{4}$ であり、これを前問の結果に代入して丁寧に整理すれば、上の等式が得られる。