平成 26 年 10 月 31 日（金）

応用理工学類 応用数学 I

Quiz 5

締切 再来週水曜日の講義開始時：11 月 12 日（水）

問 1 ある区分なめらかな周期関数 $f(x)$ を複素フーリエ級数に展開したところ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{1-in} \qquad (*)$$

となったという。次に従って、元の関数 $f(x)$ を求めて見よう。

(1) 関数 $f(x)$ の基本周期はなにか。また、不連続点はあるだろうか。

(2) 上式 (*) のフーリエ級数を項別微分することにより次を示せ。

$$f'(x) = f(x) - 2\pi\delta_{2\pi}(x)$$

(3) 前問より $0 < x < 2\pi$ において、$f'(x) = f(x)$ であることから、この範囲では

$$f(x) = Ae^{x} \qquad \text{(ただし } A \text{ は定数)}$$

となる。不連続点 $x = 0$ における $f(x)$ のとびが 2π であることを用いて、係数 A が $\frac{2\pi}{e^{2\pi}-1}$ となることを示せ。

(4) $f(x)$ のフーリエ級数にパーシバルの等式を適用して、次の公式を導け。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \pi \coth \pi$$

問 2 以下の問に答えよ。

(1) $f_1(x)$ および $f_2(x)$ を周期 2π の周期実関数とする。d_n および e_n をそれぞれ $f_1(x)$ と $f_2(x)$ の複素フーリエ係数としたとき、以下の式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x+a)f_2(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e_{-n} e^{ina}$$

(2) (1) において $f_1(x) = f_2(x) \equiv f(x)$ としたとき、パーシバルの定理（平均 power）

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

を導出せよ。ここで、c_n は $f(x)$ の複素フーリエ係数である。

(3) a_n および b_n を $f(x)$ の実フーリエ係数としたとき、(2) の結果を書き直すことにより、実フーリエ展開の場合のパーシバルの等式を導け。

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{\pi}{2}a_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

応用数学 I のホームページ

`http://www.bk.tsukuba.ac.jp/~CARS/lectureApplMath.html`