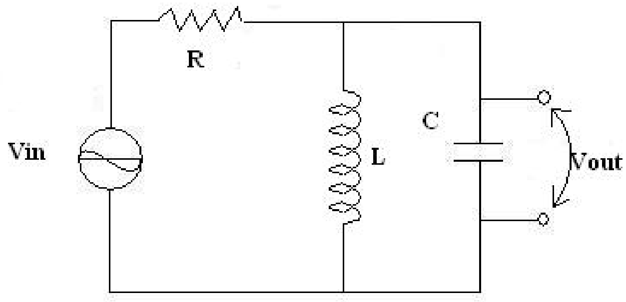
応用理工学類 応用数学 I **Quiz 4 解説**

問 1 次の回路において、入力電圧波形 $V_{in}(t)$ と出力電圧波形 $V_{out}(t)$ の関係を考える。



（1）コイル L を流れる電流 J とコンデンサ C に溜まっている電荷 Q の間には

$$L\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{C}Q$$

の関係があることを説明せよ。（5 点）
（答）コイルとコンデンサは並列につながれているので、それらにかかっている電圧は常に等しいため。
（2）上を用いて Q を消去することにより、電流 J が満たす微分方程式が

$$\alpha\frac{d^2J(t)}{dt} + \beta\frac{dJ(t)}{dt} + \gamma J(t) = V_{in}(t)$$

とまとまることを示し、係数 α, β, γ を決定せよ。（5 点）
（答）各瞬間に抵抗 R を流れている電流は $J + \frac{dQ}{dt} = J + LC\frac{d^2J}{dt^2}$ なので抵抗にかかる電圧はその R 倍。コイルにかかる電圧と足して、

$$RLC\frac{d^2J(t)}{dt^2} + L\frac{dJ(t)}{dt} + RJ = V_{in}(t)$$

が各瞬間で成り立つことになる。

（３）入力波形が単一の振動数をもつ波形

$$V_{in}(t) = V_0 e^{i\omega t}$$

としたとき、定常出力波形 $V_{out}(t)$ を求めよ。（５点）
（答）線形回路なので、コイルに流れる定常電流は $J(t) = J_0 e^{i\omega t}$、定常出力波形は $V_{out}(t) = V_1 e^{i\omega t}$ という関数形に限られてしまい、残るは振幅 J_0, V_1 を決定するだけ。上の式に代入すると

$$\left\{RLC(i\omega)^2 + L(i\omega) + R\right\} J_0 = V_0, \qquad J_0 = \frac{V_0}{RLC(i\omega)^2 + L(i\omega) + R}$$

よって、出力波形は

$$V_{out}(t) = L\frac{d}{dt}\left(J_0 e^{i\omega t}\right) = \frac{i\omega L V_0}{RLC(i\omega)^2 + L(i\omega) + R} e^{i\omega t}$$

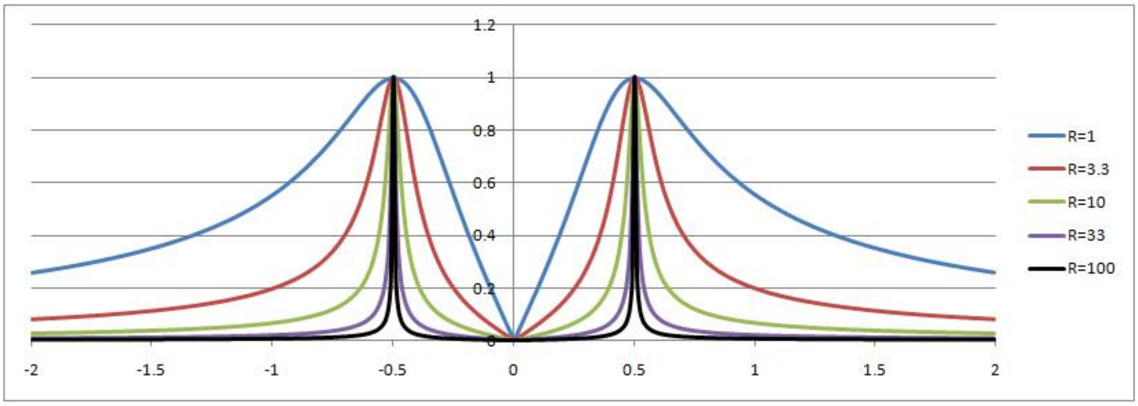
（４）仮に $R = 100, C = 2, L = 2$ とおいて、上で求めた出力波形と入力波形の振幅の比を（パソコンなどを用いて）グラフに描いてみよ（周波数特性）。抵抗 R が大きいときに、グラフが特定の周波数

$$\omega = \sqrt{LC}$$

で鋭いピークをもつことを説明せよ。（５点）
（答）振幅の比は

$$\left|\frac{V_1}{V_0}\right| = \left|\frac{i\omega L}{R(1-\omega^2 LC) + iL\omega}\right| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2}}$$

これを $R = 1, 3.3, 10, 33, 100$ と変えながらグラフにすると下のよう。



周波数 $\omega = \pm 1/\sqrt{LC}$ で鋭いピークとなるのは、その周波数で $(1-\omega^2 LC)^2$ が小さくなり、それ以外では大きな R のせいで分母が大きいから。

（５）入力波形として周期 2π のノコギリ波

$$V_{in}(t) = at \text{ for } -\pi \le t < \pi, \qquad V_{in}(t \pm 2\pi) = V_{in}(t)$$

を加えたとき、$R = 100, C = 2, L = 2$ として定常出力波形を計算し、グラフに描いてみよ。（４０点）

(答) 入力のノコギリ波は 2π を周期とする波形なので、整数の周波数（$\omega = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）をもつフーリエ成分に分解される。

$$V_{in}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

この n 番目のフーリエ成分は

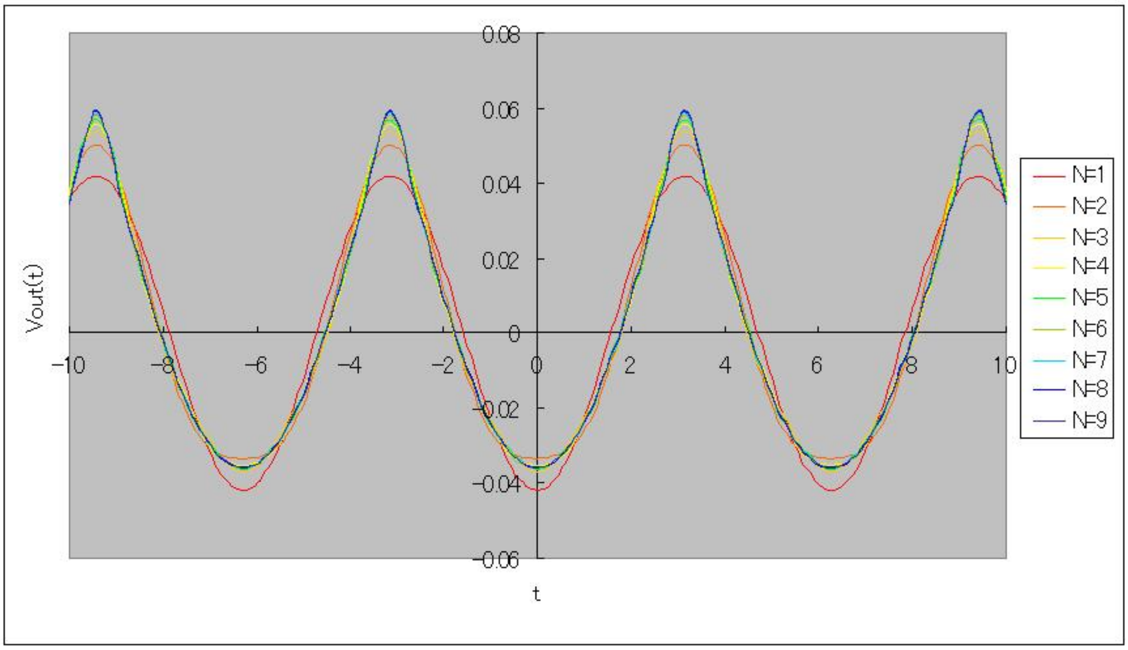
$$c_0 = 0, \qquad c_{n(\neq 0)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ate^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{ate^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{a(-1)^n}{n}i$$

となるので、対応する出力波の第 $n(\neq 0)$ フーリエ成分は、周波数 $\omega = n$ を代入して、

$$\frac{inL}{R(1-n^2LC)+inL}c_n = \frac{La(-1)^{n+1}}{R(1-n^2LC)+inL}$$

従って、出力波形は t の関数として

$$V_{out}(t) = \lim_{N\to\infty} 2Re\left[\sum_{n=1}^{N}\frac{La(-1)^{n+1}}{R(1-n^2LC)+inL}e^{int}\right]$$



この級数は絶対収束となっており、出力波形は連続関数になっていることが分かるであろう。入力波形 $V_{in}(t)$ は不連続であった。

問 2 区間 $[-L, L)$ において次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -L \le x < -a \\ 1 & -a \le x < a \\ 0 & a \le x < L \end{cases}$$

ここで、$L > 0$ で、a は $0 < a < L$ の定数である。以下に答えよ。
$\theta(x)' = \delta(x)$ の同等性が超関数として成り立つことにまつわる問題です。ここでも形式的な理解に陥るのをなるべく避け、関数列の極限をもとにして直観的な理解を作り上げておいてください。

(1) 考えている区間においては $f(x)$ を次のように書けることを示せ。$\theta(x)$ は階段関数。

$$f(x) = \theta(x+a) - \theta(x-a)$$

このように定義すれば、区間 $[-L, -a), [-a, a), [a, L)$ それぞれにおいて $f(x)$ の定義を満たすことを確かめればよい。グラフを描くのでもよい。

(2) 考えている区間において、$f(x)$ の導関数が以下のように与えられることを示せ。

$$f'(x) = \delta(x+a) - \delta(x-a)$$

(1) の結果で両辺の微分を考える。

(3) 考えている区間において $f'(x)$ を次のようにフーリエ級数展開したとする。

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

フーリエ係数 c_n を求めよ。
発散級数を扱うことを覚悟したうえでフーリエ係数を求める公式に代入してみると

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \{\delta(x+a) - \delta(x-a)\} e^{\frac{-in\pi x}{L}} dx = \frac{1}{2L}\left\{e^{\frac{in\pi a}{L}} - e^{-\frac{in\pi a}{L}}\right\} = \frac{i\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}{L}$$

(4) (3) の結果を項別積分することにより、考えている区間 $[-L, L)$ における関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を求め、$f(x)$ を直接フーリエ級数展開したものと比べよ。

上の結果を項別に積分して $f(x) = const. + \sum_{n \ne 0} \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) e^{\frac{in\pi x}{L}}$

定数 $const.$ は積分定数であるが、$f(x)$ の平均値であることから $const. = \frac{a}{L}$ と決められる。これは $f(x)$（なめらかな区分連続）を直接フーリエ展開した結果

$$C_{n\ne0} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx = \frac{1}{2L}\int_{-a}^{a} e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx = \frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{i\pi a}{L}\right)$$

$$C_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) dx = \frac{a}{L}$$

に確かに一致する。