応用理工学類 応用数学 I　Quiz 3 解説

問 1 つぎの無限級数に関して、以下の問に答えよ。

$$\sum_{n=\text{正の奇数}} \frac{\sin n\pi x}{n}$$

(1) 周期関数

$$f(x) = \begin{cases} +1 & for \quad -1 \le x < 0 \\ -1 & for \quad 0 \le x < 1 \end{cases} \quad , \quad f(x+2) = f(x)$$

のフーリエ展開を考えることにより、上の級数が全ての x に対して収束することがわかることを説明せよ。（２０点）

【与えられた級数の収束性を直接論じる代わりに、その級数が $f(x)$ という区分的になめらかな関数のフーリエ展開級数になっていることを指摘する。これと Dirichlet の定理から、与えられた級数が全ての x に対して収束することを主張する。】

$f(x)$ はいわゆる「奇関数」なので、フーリエ展開すると sin 関数のみの展開

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$$

となるはず。その係数を求めてみると

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx = 2\int_0^1 \sin n\pi x dx = -2\left[\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right]_0^1$$
$$= \text{奇数の } n \text{ に対しては} \frac{4}{n\pi}\text{、偶数の } n \text{ に対しては } 0$$

これは与えられたフーリエ級数に一致する。結局のところ、与えられた級数は、区分的になめらかな関数 $f(x)$ のフーリエ展開

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=\text{正の奇数}} \frac{\sin n\pi x}{n} \qquad \text{(ただし不連続点を除く)}$$

であったことになる。そこで Dirichlet の定理 を援用すると、区分的になめらかな関数のフーリエ展開級数 は必ず（不連続点も含めて） 全ての x に対して収束する のであったから、ここに与えられた級数も全ての x に対して収束すべきであることになる。（ただし、不連続点においては、収束はするものの、値が $f(x)$ に一致しないことに注意。）Dirichlet の定理は証明しなかったが、その強力な主張内容が伺われるであろう。

(2) 上の級数は、$0 < x < 1$ なるどんな x に対しても、同じ値に収束することを説明し、次の無限交代級数の値を求めよ。（２０点）

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots$$

$0 < x < 1$ の範囲で $f(x) = 1$ と一定である。つまり その範囲で連続 である。従って Dirichlet の定理 によれば、前問で求めた $f(x)$ のフーリエ展開級数は、連続領域では

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=\text{正の奇数}} \frac{\sin n\pi x}{n} \quad \to \quad f(x)$$

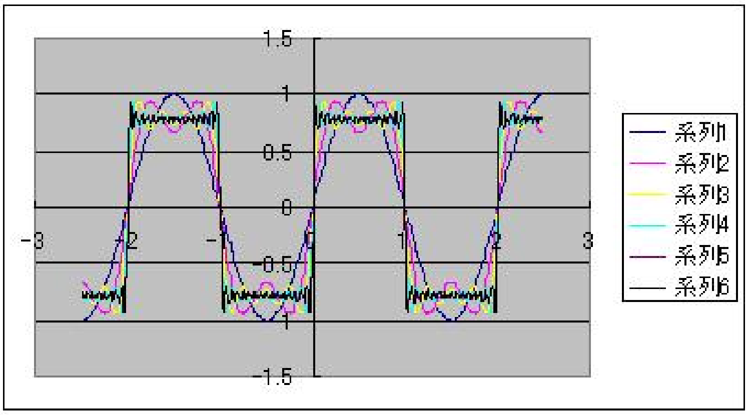
と、関数 $f(x)$ の値に収束する 。つまり $0 < x < 1$ である限り、上の級数は収束し、その値は $f(x) = 1$ で与えられることになる。（不連続点ではこの等号は成り立たないことに注意。）

特に $x = 1/2$ とおけば、

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots\right)$$

となり、ここから求める無限交代級数は収束すること、またその和は $\frac{\pi}{4}$ となることがわかる。

ある級数があるとき、それが何らかの区分的になめらかな関数のフーリエ展開になっていることを指摘し、それを根拠にその級数の収束を主張する、という逆転したやり口を理解してください。



問 2 つぎのフーリエ級数で与えられる関数 $g(x)$ に関して、以下の問に答えよ。

$$g(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} - \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 6x}{6^2} - \frac{\cos 7x}{7^2} + \cdots$$

(1) 右辺の級数は全ての実数 x に対して収束して連続関数を与え、$-\pi \leq x \leq \pi$ では $g(x) = \frac{x^2}{4}$ となる。この関数を微分した $g'(x)$ をフーリエ展開し、それが $g(x)$ のフーリエ級数の「項別微分」に一致することを確かめよ。（２０点）

分母が n^2 と 2 乗の形になっていることから、このフーリエ級数は全ての実数 x に対して一様絶対収束となり、連続関数を表すことが分かる。$g(x)$ は $-\pi \leq x \leq \pi$ における $\frac{x^2}{4}$ を周期的に拡張したもの（連続偶関数）と考えられ、その場合のフーリエ係数を求めてみると、

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{4} dx = \frac{\pi^2}{6}$$

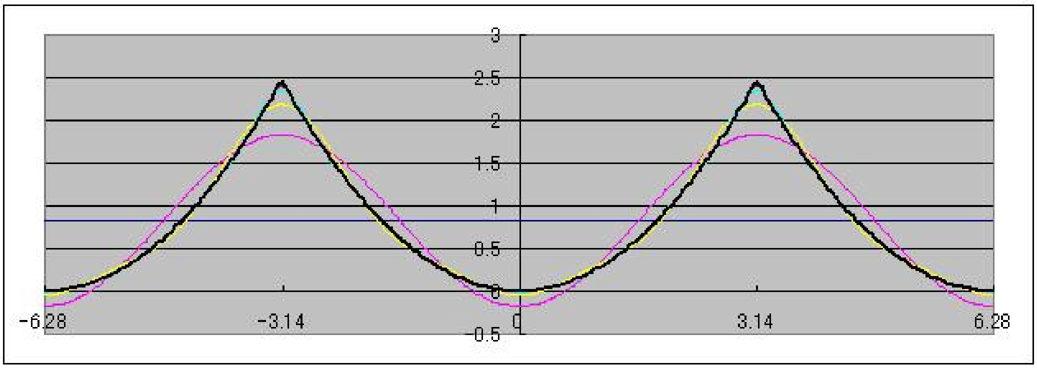
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{4} \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{4}\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2}\frac{\sin nx}{n} dx$$

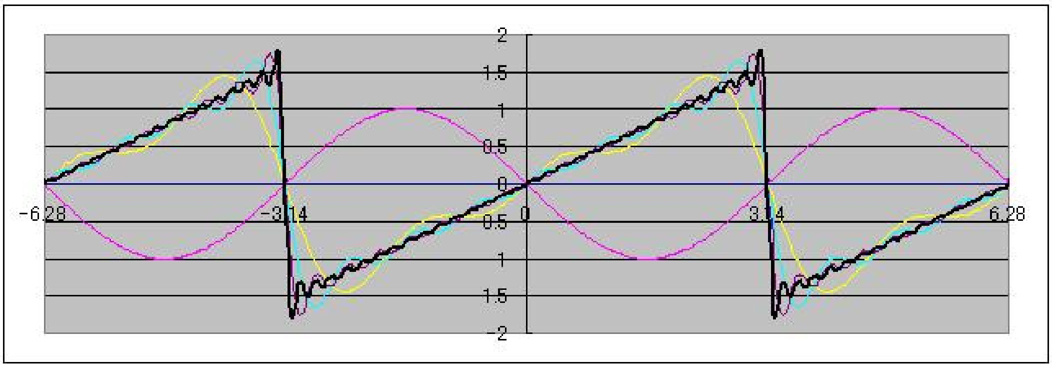
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2}\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\frac{\cos nx}{n^2} dx = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

よって

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

となり、与えられた級数に一致することがわかる。このことから逆に $g(x)$ は区間 $[-\pi, \pi]$ における $\frac{x^2}{4}$ を周期的に拡張したものであることが確認される。つまり $-\pi \leq x \leq \pi$ において $g(x)$ は $\frac{x^2}{4}$ に等しい。





$g(x)$ を微分した $g'(x)$ は区間 $-\pi < x < \pi$ における $\frac{x}{2}$ を周期的に繰り返したものとして、そのフーリエ展開を求める。グラフに見るように周期 2π の奇関数なので $\sin$ 関数だけの展開となり、

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}\sin nx dx = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2}\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\frac{\cos nx}{n}dx = -\frac{(-1)^n}{n}$$

よって不連続点以外では

$$g'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} - \cdots$$

となる。これは $g(x)$ のフーリエ展開を項別微分したものと丁度一致しているのが見て取れる。

(2) $g(x)$ の原始関数の一つを

$$G(x) = \int_0^x g(y)dy$$

と置くとき、関数 $F(x) \equiv G(x) - \frac{\pi^2}{12}x$ が周期関数となることを確かめよ。（１０点）

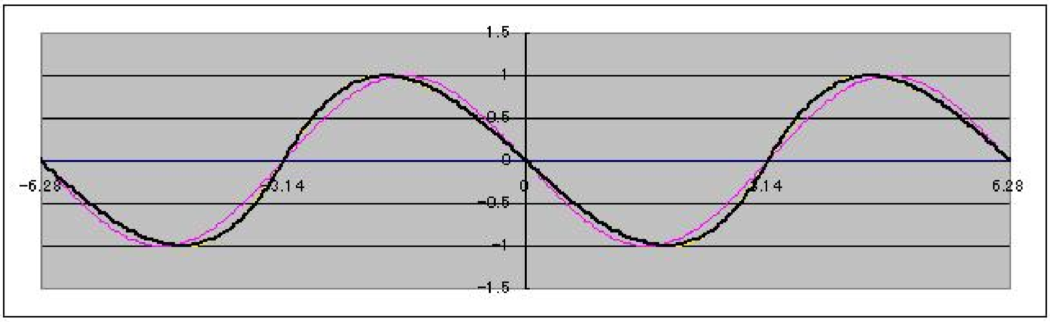
$g(x)$ が周期 2π の関数であることと、

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{4}dx = \frac{\pi^3}{6}$$

から、$F(x)$ は周期関数であることが、次のようにして言える。

$$\begin{aligned} F(x+2\pi) = G(x+2\pi) - \frac{\pi^2}{12}(x+2\pi) &= \int_0^{x+2\pi} g(y)dy - \frac{\pi^2}{12}(x+2\pi) \\ &= \left[\int_0^x g(y)dy - \frac{\pi^2}{12}x\right] + \left[\int_x^{x+2\pi} g(y)dy - \frac{\pi^2}{12}\cdot 2\pi\right] \\ &= F(x) + \left[\int_{-\pi}^{\pi} g(y)dy - \frac{\pi^3}{6}\right] = F(x) \end{aligned}$$

次は $F(x)$ のグラフ。



(3) $F(x)$ をフーリエ展開することにより、$G(x)$ が $g(x)$ のフーリエ展開を項別に積分したものに等しくなることを確認せよ。（２０点）
関数 $F(x)$ は、$-\pi \leq x \leq \pi$ における関数 $\frac{1}{12}x\left(x^2-\pi^2\right)$ を周期的に繰り返したものである。グラフから分かるようにそれは奇関数なので、その展開は $\sin nx$ だけとなるはず。展開係数を求めると、

$$b_n = \frac{1}{12\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^3-\pi^2 x)\sin nx dx$$

$$= -\frac{1}{12\pi}\left[(x^3-\pi^2 x)\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{12\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2-\pi^2)\frac{\cos nx}{n}dx$$

$$= \frac{1}{12\pi}\left[(3x^2-\pi^2)\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{12\pi}\int_{-\pi}^{\pi}6x\frac{\sin nx}{n^2}dx$$

$$= \frac{1}{12\pi}\left[6x\frac{\cos nx}{n^3}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{12\pi}\int_{-\pi}^{\pi}6\frac{\cos nx}{n^3}dx = \frac{(-1)^n}{n^3}$$

結局

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx, \quad G(x) = \frac{\pi^2}{12}x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

となり、$g(x)$ のフーリエ展開を項別積分したものに一致。

問 3 周期 T の周期関数 $f(x)$ の複素フーリエ級数についての以下の公式を、実フーリエ級数の公式との違いを意識しながら、5 回書け。（１０点）

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi}{T}x}, \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} e^{-i\frac{2n\pi}{T}x} f(x)dx$$

省略。