平成 26 年 10 月 15 日（水）

応用理工学類　応用数学 I

Quiz 3

締切　来週金曜日の講義開始時：10 月 24 日（金）

問 1 次の無限級数に関して、以下の問に答えよ。

$$\sum_{n=\text{正の奇数}} \frac{\sin n\pi x}{n}$$

(1) 周期関数

$$f(x) = \begin{cases} +1 & for \quad -1 \leq x < 0 \\ -1 & for \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}, \quad f(x+2) = f(x)$$

のフーリエ展開を考えることにより、上の級数が全ての x に対して収束することがわかることを説明せよ。

(2) 上の級数は、$0 < x < 1$ なるどんな x に対しても、同じ値に収束することを説明し、次の無限交代級数の値を求めよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots$$

問 2 次のフーリエ級数で与えられる関数 $g(x)$ に関して、以下の問に答えよ。

$$g(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} - \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 6x}{6^2} - \frac{\cos 7x}{7^2} + \cdots$$

(1) 右辺の級数は全ての実数 x に対して収束して連続関数を与え、$-\pi \leq x \leq \pi$ では $g(x) = \frac{x^2}{4}$ となる。この関数を微分した $g'(x)$ をフーリエ展開し、それが $g(x)$ のフーリエ級数の「項別微分」に一致することを確かめよ。

(2) $g(x)$ の原始関数の一つを

$$G(x) = \int_0^x g(y)dy$$

と置くとき、関数 $F(x) \equiv G(x) - \frac{\pi^2}{12}x$ が周期関数となることを確かめよ。

(3) $F(x)$ をフーリエ展開することにより、$G(x)$ が $g(x)$ のフーリエ展開を項別に積分したものに等しくなることを確認せよ。

問 3 周期 T の周期関数 $f(x)$ の複素フーリエ級数についての以下の公式を、実フーリエ級数の公式との違いを意識しながら、5 回書け。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi}{T}x}, \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} e^{-i\frac{2n\pi}{T}x} f(x)dx$$

応用数学 I のホームページ

http://www.bk.tsukuba.ac.jp/~CARS/lectureApplMath.html