応用理工学類　応用数学 I　**Quiz 2 解説**

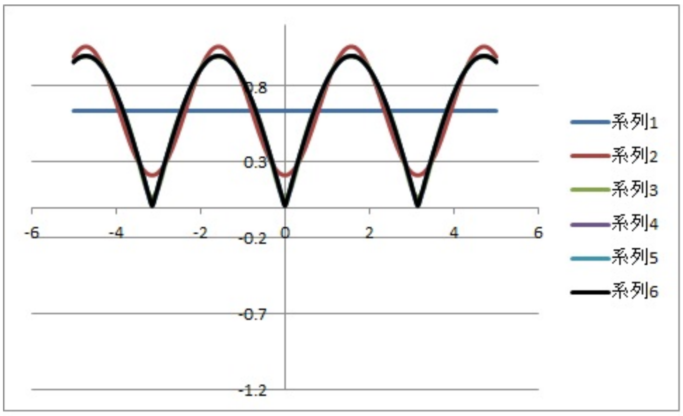
問 1　関数 $f(x) = \sin x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ について、以下の問いに答えよ。

(i)　関数 $f(x)$ を偶関数に周期的拡張したときのグラフの概略を書け。
この関数をフーリエ余弦級数に展開せよ。
周期 π の偶関数を考えることになるので $\cos 2nx$ で展開 $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$。

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 2nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x\right\} dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right] = \frac{-1}{\pi\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[2 - \frac{\cos 2x}{1^2 - \frac{1}{4}} - \frac{\cos 4x}{2^2 - \frac{1}{4}} - \frac{\cos 6x}{3^2 - \frac{1}{4}} - \frac{\cos 8x}{4^2 - \frac{1}{4}} - \cdots\right]$$

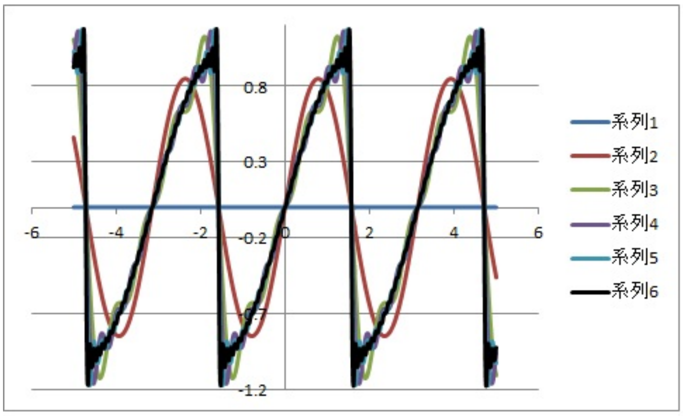


(ii)　関数 $f(x)$ を奇関数に周期的拡張したときのグラフの概略を書け。
この関数をフーリエ正弦級数に展開せよ。
周期 π の奇関数を考えることになるので $\sin 2nx$ で展開 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$。

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\cos(2n-1)x - \cos(2n+1)x\right\} dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} - \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-(-1)^n}{2n-1} - \frac{(-1)^n}{2n+1}\right] = -\frac{2(-1)^n n}{\pi\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)}$$

$$f(x) = -\frac{4}{\pi}\left[-\frac{1\sin 2x}{1^2 - \frac{1}{4}} + \frac{2\sin 4x}{2^2 - \frac{1}{4}} - \frac{3\sin 6x}{3^2 - \frac{1}{4}} + \frac{4\sin 8x}{4^2 - \frac{1}{4}} - \cdots\right]$$



上の余弦展開に比べると、$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ では同じ曲線に近づいて行くものの、収束が遅いことに注目。こちらの曲線には不連続点があることに関連している。

問２ つぎの級数で表される関数に関して、以下の問に答えよ。

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

(1) $f(x)$ はどのような周期の関数か。2π

(2) $f(x)$ には不連続点があるか。各項の絶対値は $\frac{const.}{n^2}$ のように小さくなり、x の値に無関係に一様絶対収束するので、$f(x)$ に不連続点はない。

(3) $-\pi \le x \le \pi$ の範囲において $f(x)=x^2$ であることを示せ。与えられた級数の形から、それは周期 2π の偶関数になる筈なので、範囲 $-\pi < x < \pi$ で $f(x)=x^2$ に等しいことが疑われる。そこでもしそうだとしたらどうなるか、展開係数を確かめて見ると確かに

$$a_0=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3},\quad a_n=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx dx=\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

となる。従って $f(x)$ は範囲 $-\pi<x<\pi$ における x^2 を周期的に拡張したものであることがわかる。$f(x)$ は連続関数なので、

$$f(\pi)=f(\pi-0)=(\pi-0)^2=\pi^2,\quad f(-\pi)=f(-\pi+0)=(-\pi+0)^2=\pi^2$$

となり、範囲の両端でも等号が成り立つ。従って閉区間 $[-\pi,\pi]$ において $f(x)=x^2$ となる。 $[-\pi,\pi]$ の外では等しくないことに注意！

(4) (1) の結果を用いて、以下の式を示せ。

$$\zeta(2)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

ここで $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ はリーマン（Riemann）のゼータ関数（zeta function）とよばれる、数学史上有名な関数である。$x=\pi$ に於いて冒頭の級数は π^2 に（絶対）収束するはず。つまり $\frac{\pi^2}{3}+4\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right\}=\pi^2$ となるので、ここから逆算すれば上を得る。Dirichlet の定理により $x=\pi$（端点）で等号が成り立つことが肝心なことに注意。