応用理工学類 応用数学 I　**Quiz 1 解説**

問 1 $f(x)$ を周期 $2L$ の周期関数としたとき、以下のフーリエ級数の公式を 5 回書け。
何も見ずに書けるくらい、各部の「意味と役割」を理解してもらうのが趣旨です。

問 2 $m, n\ (>0)$ を任意の自然数として、つぎの等式を証明せよ。

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_{-L}^{L}\left(\frac{e^{i\frac{m\pi x}{L}}+e^{-i\frac{m\pi x}{L}}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}}+e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-L}^{L}\left\{e^{i\frac{(m+n)\pi x}{L}}+e^{i\frac{(m-n)\pi x}{L}}+e^{i\frac{(-m+n)\pi x}{L}}+e^{i\frac{(-m-n)\pi x}{L}}\right\}dx = L\delta_{m,n}$$

ここで任意の整数 N に関して $I_N \equiv \int_{-L}^{L} e^{i\frac{N\pi x}{L}}dx = \int_0^{2L} e^{i\frac{N\pi x}{L}}dx = 2L\delta_{N,0}$ となることを用いた。なぜそうなるかというと、

$$N=0 \text{ のときは } I_N = \int_0^{2L} 1dx = 2L \text{ だし、}$$

$$N\neq 0 \text{ のときは } I_N = \int_0^{2L} e^{i\frac{N\pi x}{L}}dx = \frac{L}{iN\pi}\left[e^{i\frac{N\pi x}{L}}\right]_0^{2L} = \frac{L}{iN\pi}\left(e^{2N\pi i}-1\right) = 0$$

一周期に渡った積分が N によってゼロまたは $2L$ になるということの事実は、今後繰り返し現れるので、各自で計算してその仕組みを納得しておいてください。

問 3 つぎの周期関数について、そのグラフを描き、基本周期を決定し、フーリエ級数展開を求めよ。

(1)

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi), \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

$f(x)$ は偶関数なので $\cos nx$ しか含まない。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

とすれば係数は

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

$n=0$ のときは

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$n>0$ のときは

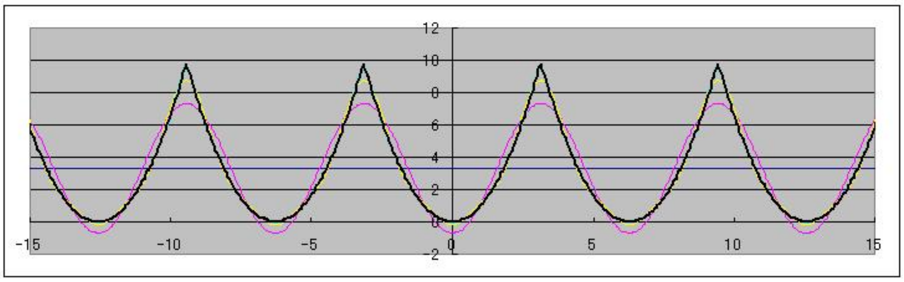
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\frac{\sin nx}{n}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[2x\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\frac{\cos nx}{n^2}dx = \frac{4(-1)^n}{n^2} + \frac{2}{\pi n^3}\left[\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

結局まとめて

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx = \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{1^2}\cos x + \frac{4}{2^2}\cos 2x - \frac{4}{3^2}\cos 3x + \cdots$$

n の上限を $0, 1, 2, 4, 8, 16, 32$ と増やすにつれて、右辺のグラフは次の通り。項数が増えると $f(x)$ に近づいてゆく様子が見えるでしょう。なお、$f(x) = x^2$ となるのは $|x| \leqslant \pi$ の領域に限ることに注意。



(このようなグラフも必要に応じて描けるようになっておいてください。)

(2)

$$f(x)=\frac{x}{2\pi}-\left[\frac{x}{2\pi}\right],\qquad \text{ここで } \left[\tfrac{x}{2\pi}\right] \text{ は } \tfrac{x}{2\pi} \text{ を超えない最大の整数}$$

これも基本周期は 2π なので $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}x\cos nx dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}x\sin nx dx$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}x dx=\frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi}=1$$

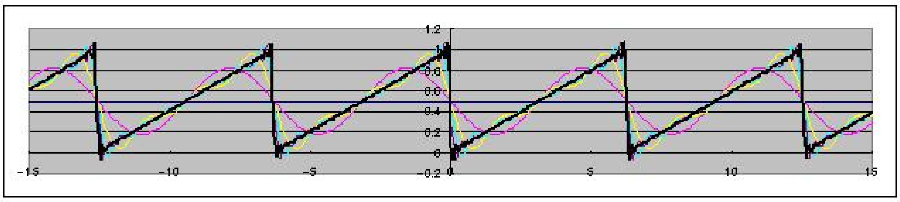
$$a_{n(>0)}=\frac{1}{2\pi^2}\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{n}dx=0$$

$$b_{n(>0)}=-\frac{1}{2\pi^2}\left[x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{n}dx=-\frac{1}{n\pi}$$

結局まとめて

$$f(x)=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\pi}$$

右辺の和を $1,2,4,8,16,32$ 項とった場合のグラフを描くと次のよう。



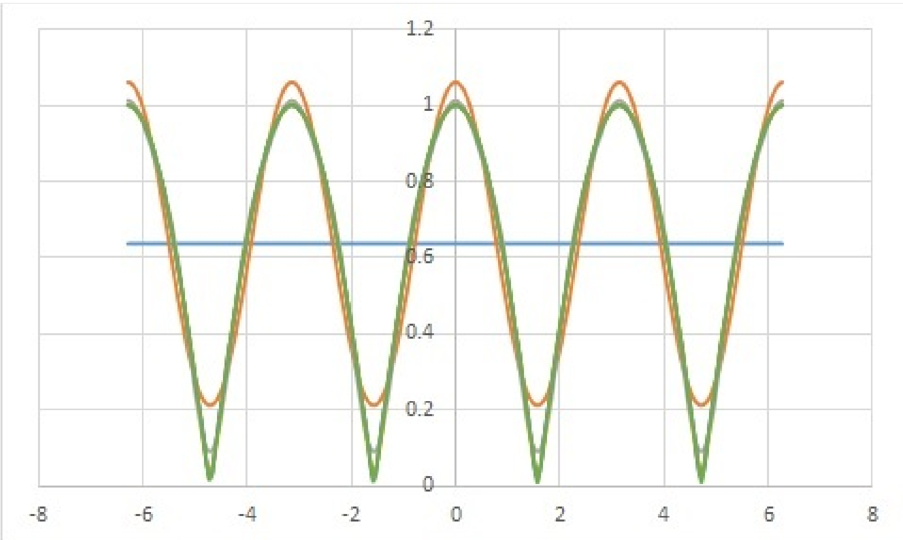
(3)

$$f(x) = |\cos x|$$

基本周期は π で偶関数なので cos ばかりを使って $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx$ となる筈。係数は $a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2nx dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2nx dx$ となり、積分を丁寧に計算すれば $a_0 = \frac{4}{\pi}, a_n = -\frac{(-1)^n}{\pi(n^2-\frac{1}{4})}$ つまり

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2-\frac{1}{4})}\cos 2nx = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi}\cos 2x - \frac{4}{15\pi}\cos 4x + \frac{4}{35\pi}\cos 6x - \frac{4}{63\pi}\sin 8x + \cdots$$

右辺の和を $1, 2, 4, 8, 16, 32$ 項とった場合のグラフを描くと次のよう。



問 4 ある周期関数 $f(x)$ がフーリエ係数 a_n, b_n を持ち、同じ周期をもつもう一つの関数 $g(x)$ がフーリエ係数 c_n, d_n を持つとする。このとき、関数 $h(x) \equiv f(x) + g(x)$ のフーリエ係数は $a_n + c_n, b_n + d_n$ となるだろうか。

周期を $2L$ として、関数 $h(x)$ のフーリエ成分はそれぞれ次の積分で与えられる。

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} h(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)+g(x)\}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = a_n + c_n$$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} h(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)+g(x)\}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = b_n + d_n$$