平成 26 年 12 月 10 日（水） 第２限

応用数学 I （秋学期） 中間試験

【問１】、【問２】は**別々の解答用紙**に解答せよ。
解答用紙**２枚それぞれ**に**学籍番号**と**名前**の記入を忘れないようにすること。
また、単純ミスがあっても途中点を与えられるよう、考え方の筋道が分かるように解答すること。

【問１】 以下の問に答えよ。

(I) 実周期関数 $f(x)$ を複素フーリエ級数に展開するとき、その複素フーリエ係数 c_n は $c_{-n} = c_n^*$ の関係を満たすことを示せ。ここで c_n^* は c_n の複素共役である。

(II) 関数 $f(x)$ は 2π の周期を持ち、区間 $-\pi \le x < \pi$ において $\cosh(sx)$ に一致するものとする。以下の各問に答えよ。ただし s は 0 でない実定数とする。なお、$\cosh(x)$ は双曲線余弦関数と呼ばれ、$\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ と定義される。同様に、$\sinh(x)$ は双曲線正弦関数と呼ばれ、$\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ と定義される。解答には $\cosh(x)$ 及び $\sinh(x)$ を用いてよい。

(1) $f(x)$ を複素フーリエ級数に展開せよ。

(2) 上の結果を用いて、次の式を導け。

$$\coth(\pi s) \equiv \frac{\cosh(\pi s)}{\sinh(\pi s)} = \frac{1}{\pi s} + \frac{2s}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s^2 + n^2}$$

(3) パーシバルの等式を用いることにより、つぎの級数の値を求めよ。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(s^2 + n^2)^2}$$

【問２】 $f(x) = e^{-|x|}$ として次に答えよ。（ただし x は実変数で $-\infty < x < +\infty$ とする。）

(I) $f(x)$ のフーリエ変換 $F(k) = \mathcal{F}[f](k)$ を求めよ。

(II) $iF'(k)$ のフーリエ逆変換は $xf(x)$ となることを示せ。

(III) フーリエ変換の一般的性質を利用して、次の関数のフーリエ変換を求めよ。

(1) $e^{ix} f(x)$ (2) $f(x+1)$ (3) $f'(x)$

(IV) 関数 $g(x)$ に対する積分方程式

$$(f * g)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy = x f(x)$$

を合成積の性質を用いて解くと、次の積分

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2k}{k^2+1} e^{ikx} dk$$

に帰着することを導け。

(V) 前問の積分を留数の方法で計算することにより、関数 $g(x)$ を求めよ。なお、x の値による場合分けと積分経路の閉じ方を明示すること。

応用数学Ｉ（秋学期）中間試験解説【問１】

(I) 省略

(II)

（１）

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh(sx) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \left(e^{(s-in)x} + e^{-(s+in)x} \right) \\
&= \frac{s(-1)^n}{\pi(s^2+n^2)} \sinh(\pi s)
\end{aligned}
$$

$$
f(x) = \frac{s\sinh(\pi s)}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s^2+n^2} e^{inx}
$$

（２）（１）の式に $x=\pi$ 代入

$$
\cosh(\pi s) = \frac{s}{\pi}\sinh(\pi s) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s^2+n^2} e^{in\pi}
$$

$$
\begin{aligned}
\coth(\pi s) &= \frac{\cosh(\pi s)}{\sinh(\pi s)} \\
&= \frac{s}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s^2+n^2} (-1)^n \\
&= \frac{1}{\pi s} + \frac{2s}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s^2+n^2}
\end{aligned}
$$

（３）パーシバルの等式は

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} dx (\cosh(2sx)+1) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi s}\sinh(2\pi s)
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(s^2+n^2)^2} \cdot \left(\frac{s\sinh(\pi s)}{\pi} \right)^2
$$

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(s^2+n^2)^2} = \frac{\pi^2}{2s^2\sinh^2(\pi s)} \left(1 + \frac{\sinh(2\pi s)}{2\pi s} \right)
$$

【問２】関数 $f(x)=e^{-|x|}$ について次に答えよ。

(I)

$$F(k)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}e^{-|x|}dx=\frac{i}{k+i}-\frac{i}{k-i}=\frac{2}{(k+i)(k-i)}=\frac{2}{k^2+1}$$

(II) $F(k)$ は連続関数で $k\to\pm\infty$ で $|F(k)|\to 0$ となることに注意して

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}iF'(k)e^{ikx}dk=\frac{1}{2\pi}\left[iF(k)e^{ikx}\right]_{-\infty}^{\infty}+\frac{x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(k)e^{ikx}dk=xf(x)$$

(III)

$$\begin{aligned}
&(1)\quad \mathcal{F}\left[e^{ix}f(x)\right]=F(k-1) &&=\frac{2}{(k-1)^2+1}\\
&(2)\quad \mathcal{F}\left[f(x+1)\right]=F(k)e^{ik} &&=\frac{2e^{ik}}{k^2+1}\\
&(3)\quad \mathcal{F}\left[f'(x)\right]=ikF(k) &&=\frac{2ik}{k^2+1}
\end{aligned}$$

(IV) 合成積の性質から

$$F(k)\cdot\mathcal{F}[g(x)](k)=iF'(k)$$

より

$$\mathcal{F}[g(x)](k)=\frac{iF'(k)}{F(k)}=i\left\{\log F(k)\right\}'=-\frac{2ik}{k^2+1}\quad （実はこれは -\mathcal{F}[f'(x)] に等しい。）$$

従ってフーリエ逆変換して

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2k}{k^2+1}e^{ikx}dk$$

(V) 部分分数分解を使って

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{e^{ikx}}{k+i}+\frac{e^{ikx}}{k-i}\right\}dk$$

● $x>0$ のときは上半面で積分経路を左回りに閉じて $g(x)=Res(k=i)=e^{-x}$

● $x<0$ のときは下半面で積分経路を右回りに閉じて $g(x)=-Res(k=-i)=-e^{x}$

これをスマートにまとめて $g(x)=sgn(x)e^{-|x|}$ とか $g(x)=\frac{x}{|x|}e^{-|x|}$ とか書いてもよい。

（$x=0$ のときは Dirichlet の定理より左右極限の平均を取るならば $g(x)=0$ となるが、積分方程式だけからは不定である。なお、気がついた人がいるかもしれないが、実は $g(x)=-f'(x)$ である。）