平成 26 年 2 月 5 日（水） 第２限

応用数学Ｉ（秋学期） 期末試験

【問１】、【問２】は**別々の解答用紙**に解答せよ。
解答用紙**２枚**に**学籍番号**と**名前**の記入を忘れないようにすること。
また、単純ミスがあっても途中点を与えられるよう、考え方の筋道が分かるように解答すること。

【問１】区間 $[0, L]$ における以下の偏微分方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$$

について考える。ただし、 $\hbar, m$ は定数である。これは、シュレディンガーの波動方程式として知られている。この偏微分方程式を、フーリエ級数と変数分離の方法を用いることにより、以下の境界条件（固定端）

$$\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$$

及び次の初期条件

$$\psi(x,0) = \begin{cases} 0 \quad (0 \le x < (L-a)/2) \\ 1/a \quad ((L-a)/2 \le x \le (L+a)/2) \\ 0 \ ((L+a)/2 < x \le L) \end{cases}$$

のもとで解け。なお、解に至る手順も説明すること。

【問２】 以下は計算問題。裏面の参考資料を用いてよい。答えに現れる分数は無理に通分しなくてよい。

(I) **【ラプラス変換の基本技術】** 次の関数のラプラス変換と収束域を求めよ。

$$(1)\ f(x) = 1 + x^2 \qquad (2)\ f(x) = e^x\cos x \qquad (3)\ f(x) = \left(1+x^2\right)e^x\cos x$$

(II) **【合成積・逆変換・留数】** 両辺のラプラス変換を取ることにより、次の積分方程式を解いて $x > 0$ における $\phi(x)$ を求めよ。なお、この問題ではラプラス逆変換を留数の方法で行うこと。また、複素平面を描いて積分経路の閉じ方を明示せよ。

$$\int_0^x \phi(y)e^{2|x-y|}dy = \sinh x \qquad \text{for} \quad x > 0$$

(III) **【ラプラス変換による常微分方程式解法】** ラプラス変換の方法で次の常微分方程式を解いて、$x > 0$ における $f(x)$ を決定せよ。

$$f'' + 2f' - 3f = e^x \qquad \text{ただし } f(0) = 0, f'(0) = 1$$

(IV) **【演算子法基本パターン】** 演算子法で次を計算せよ。（同次項も含めること。）

$$\frac{1}{D^2+2D-3}x^2e^{-x}$$

(V) **【演算子法による線形常微分方程式解法】** 演算子法で次の常微分方程式を解け。

$$f'' + 2f' - 3f = e^{-3x} \qquad \text{ただし } f(0) = 0, f'(0) = 0$$

参考１： 代表的関数のラプラス変換とその収束領域（a は任意の実数）

(1) $\mathcal{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}$ （$Re(s) > 0$）

(2) $\mathcal{L}\left[x\right](s) = \frac{1}{s^2}$ （$Re(s) > 0$）

(3) $\mathcal{L}\left[x^2\right](s) = \frac{2}{s^3}$ （$Re(s) > 0$）

(4) $\mathcal{L}\left[e^{ax}\right](s) = \frac{1}{s-a}$ （$Re(s) > a$）

(5) $\mathcal{L}\left[xe^{ax}\right](s) = \frac{1}{(s-a)^2}$ （$Re(s) > a$）

(6) $\mathcal{L}\left[e^{iax}\right](s) = \frac{1}{s-ia}$ （$Re(s) > 0$）

(7) $\mathcal{L}\left[\cosh ax\right](s) = \frac{s}{s^2-a^2}$ （$Re(s) > |a|$）

(8) $\mathcal{L}\left[\sinh ax\right](s) = \frac{a}{s^2-a^2}$ （$Re(s) > |a|$）

(9) $\mathcal{L}\left[\cos ax\right](s) = \frac{s}{s^2+a^2}$ （$Re(s) > 0$）

(10) $\mathcal{L}\left[\sin ax\right](s) = \frac{a}{s^2+a^2}$ （$Re(s) > 0$）

参考２： ラプラス変換の一般的性質（a は任意の複素数）

(1) $\mathcal{L}\left[e^{ax}f(x)\right](s) = \mathcal{L}\left[f(x)\right](s-a)$

(2) $\mathcal{L}\left[x^n f(x)\right] = \left(-\frac{d}{ds}\right)^n \mathcal{L}\left[f(x)\right]$

(3) $\mathcal{L}\left[f'(x)\right](s) = s\mathcal{L}\left[f(x)\right](s) - f(0)$

(4) $\mathcal{L}\left[f''(x)\right](s) = s^2\mathcal{L}\left[f(x)\right](s) - sf(0) - f'(o)$

応用数学Ｉ（秋学期）期末試験解説

【問１】$k_n = n\pi/L, E_n = \hbar^2 k_n^2/2m$ として

$$\psi(x,t) = \frac{4}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi a}{2L}\right)\sin(k_n x)\exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right)$$

【問２】 これは計算問題。手際よくテキパキと行うこと。

(I)

$$(1)\ \frac{1}{s}+\frac{2}{s^3} \quad (2)\ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-1-i}+\frac{1}{s-1+i}\right\} \quad (3)\ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-1-i}+\frac{1}{s-1+i}+\frac{2}{(s-1-i)^3}+\frac{2}{(s-1+i)^3}\right\}$$

(II)

合成積の性質より $F(s)\cdot\dfrac{1}{s-2} = \dfrac{1}{s^2-1}$ よって $F(s) = \dfrac{s-2}{s^2-1}$

従って $f(x) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{s-2}{(s+1)(s-1)}e^{sx}ds$ ただし $a > 1$

積分経路は左半面で反時計方向に閉じる。$s = \pm 1$ での留数を拾って $f(x) = \dfrac{3}{2}e^{-x} - \dfrac{1}{2}e^{x}$ と求まる。

(III)

$$\left\{s^2F(s)-1\right\}+2sF(s)-3F(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$F(s) = \frac{s}{(s-1)^2(s+3)} = \frac{1/4}{(s-1)^2}+\frac{3/16}{s-1}-\frac{3/16}{s+3} \to f(x) = \frac{1}{4}xe^x+\frac{3}{16}e^x-\frac{3}{16}e^{-3x}$$

(IV)

$$\frac{1}{(D-1)(D+3)}x^2e^{-x} = e^{-x}\frac{1}{D^2-4}x^2 = \frac{e^{-x}}{-4}\frac{1}{1-D^2/4}x^2+\text{同次項} = \frac{e^{-x}}{-4}\left\{1+\frac{D^2}{4}+\cdots\right\}x^2+\text{同次項}$$

$$= -\frac{1}{4}x^2e^{-x}-\frac{1}{8}e^{-x}+C_1e^x+C_2e^{-3x}$$

(V)

$$f(x) = \frac{1}{(D-1)(D+3)}e^{-3x} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{D-1}e^{-3x}-\frac{1}{D+3}e^{-3x}\right] = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4}e^{-3x}-e^{-3x}\frac{1}{D}1\right]+\text{同次項}$$

$$= -\frac{1}{4}xe^{-3x}+C_1e^x+C_2e^{-3x} \qquad \to \qquad f(x) = -\frac{1}{4}xe^{-3x}+\frac{1}{16}e^x-\frac{1}{16}e^{-3x}$$