平成 25 年 12 月 4 日（水） 第２限

応用数学 I （秋学期） 中間試験

【問１】、【問２】は**別々の解答用紙**に解答せよ。
解答用紙**２枚**に**学籍番号**と**名前**の記入を忘れないようにすること。
また、単純ミスがあっても途中点を与えられるよう、考え方の筋道が分かるように解答すること。

【問１】フーリエ級数展開に関する以下の問に答えよ。

(1) 周期 2π のつぎの関数 $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ x^2 & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

(2) 周期 2π のつぎの関数 $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ。

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x < \pi)$$

(3) つぎの関数 $f(x)$ の基本周期を求め、フーリエ級数展開せよ。

$$f(x) = \left| \sin\left(\frac{2x}{3}\right) \right|$$

(4) (3) の結果を用いて、つぎの級数の値を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots$$

【問２】a, b, c を正の実定数として、次に答えよ。

(1) 次の関数をフーリエ変換せよ。

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & (x \geq 0) \\ e^{+bx} & (x \leq 0) \end{cases}$$

(2) 前問の $f(x)$ をもとに次のように定義される関数 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ のフーリエ変換を書き下せ。

$$f_1(x) \equiv f(x)e^{icx}, \qquad f_2(x) \equiv f'(x), \qquad f_3(x) \equiv f(x+c)$$

(3) 留数の方法を用いて、フーリエ逆変換

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(k-ia)(k+ib)}\right]$$

を計算せよ。x の正負に応じて、どのように積分経路を閉じるべきかを明確に指定すること。

(4) パーシバル（Parseval）の等式を前問の $g(x)$ に適用することにより、次の定積分を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k^2+a^2)(k^2+b^2)} dk$$

応用数学 I （秋学期）中間試験解説 【基本的問題なので答えのみ記す。】

【問１】フーリエ級数展開に関する以下の問に答えよ。

(1) 周期 2π のつぎの関数 $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ x^2 & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3}, a_n = \frac{2(-1)^n}{n^2}, b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi^2}{n}(-1)^n + \frac{2}{n^3}((-1)^n - 1)\right]$$

(2) 周期 2π のつぎの関数 $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ。

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x < \pi)$$

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}, a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}, b_n = 0$$

(3) つぎの関数 $f(x)$ の基本周期を求め、フーリエ級数展開せよ。

$$f(x) = \left|\sin\left(\frac{2x}{3}\right)\right|$$

$f(x)$ は偶関数で、基本周期は $3\pi/2$。

$$a_0 = \frac{4}{\pi}, a_n = \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}, b_n = 0$$

(4) (3) の結果を用いて、つぎの級数の値を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots$$

$f(x)$ は任意の x で連続だから、 $x = 0$ を (3) のフーリエ級数に代入して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

【問２】a, b, c を正の定数として、次に答えよ。

(1) 次の関数をフーリエ変換せよ。

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & (x \geq 0) \\ e^{+bx} & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[f](k) = \int_0^{\infty} e^{-(a+ik)x} dx + \int_{-\infty}^{0} e^{(b-ik)x} dx = \frac{1}{a+ik} + \frac{1}{b-ik} = \frac{a+b}{(k-ia)(k+ib)}$$

(2) 前問の $f(x)$ をもとに次のように定義される関数 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ のフーリエ変換を書き下せ。

$$f_1(x) \equiv f(x)e^{icx}, \qquad f_2(x) \equiv f'(x), \qquad f_3(x) \equiv f(x+c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1](k) = \mathcal{F}[f](k-c) &= \frac{a+b}{(k-c-ia)(k-c+ib)}, \\ \mathcal{F}[f_2](k) = ik\mathcal{F}[f](k) &= \frac{ik(a+b)}{(k-ia)(k+ib)}, \\ \mathcal{F}[f_3](k) = e^{ick}\mathcal{F}[f](k) &= \frac{e^{ick}(a+b)}{(k-ia)(k+ib)}, \end{aligned}$$

(3) 留数の方法を用いて、フーリエ逆変換

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(k-ia)(k+ib)}\right]$$

を計算せよ。x の正負に応じて、どのように積分経路を閉じるべきかを明確に指定すること。

$$g(x) = \frac{1}{a+b}\left[\theta(x)e^{-ax} + \theta(-x)e^{bx}\right]$$

(4) パーシバル（Parseval）の等式を $g(x)$ に適用することにより、次の定積分を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k^2+a^2)(k^2+b^2)} dk$$

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = 2\pi \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{-2ax}}{(a+b)^2} dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{2bx}}{(a+b)^2} dx\right] = \frac{\pi}{ab(a+b)}$$